

Ex 14.1

$$\bullet a^2 \times a = a^2 \times a^1 = a^{2+1} = a^3$$

$$\bullet a^2 \times a^2 = a^{2+2} = a^4$$

$$\bullet a^2 \times a^5 = a^{2+5} = a^7$$

$$\bullet \frac{a^2}{a} = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = a^1 = a$$

$$\bullet \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

$$\bullet \frac{a^3}{a^6} = a^{3-6} = a^{-3} = \left(\frac{1}{a^3} \right)$$

$$\bullet (a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$\bullet (a^2)^{-3} = a^{2 \times (-3)} = a^{-6}$$

$$\bullet (a^{-2})^3 = a^{-2 \times 3} = a^{-6}$$

$$\bullet (a^{-2})^{-3} = a^{(-2) \times (-3)} = a^6$$

Ex 14.2

$$1. (-a)^2 (-b)^3 = (-a)^2 (-b)^2 \times (-b) = [(-a) \times (-b)]^2 \times (-b) = (ab)^2 \times -b = -b(ab)^2, \text{ mais ce n'est pas vraiment "simplifier"}$$

$$2. (-a)^3 (-b)^5 = (-a)^3 (-b)^3 (-b)^2 = [(-a) \times (-b)]^3 \times (-b)^2 = (ab)^3 \times b^2, \text{ même remarque}$$

$$3. (-a)^5 (-b)^3 = (-a)^3 (-b)^3 \times (-a)^2 = (ab)^3 \times a^2, \text{ idem}$$

$$4. \frac{a^2 b^3}{a b^2} = \frac{a^2}{a} \times \frac{b^3}{b^2} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b^2} \quad (\text{voir les fractions si nécessaire})$$

$$= a^2 \times b^2 \times a^{-1} \times b^{-2}$$

$$= a^{2-1} \times b^{2-2} = a^1 b^0 = a$$

$$6. \frac{a b^{-2}}{a^{-3} b} = a^1 \times b^{-2} \times \frac{1}{a^{-3}} \times \frac{1}{b^1} = a^1 \times b^{-2} \times a^3 \times b^{-1}$$

$$= a^1 \times a^3 \times b^{-2} \times b^{-1} = a^{1+3} \times b^{-2-1} = a^4 b^{-3} = \frac{a^4}{b^3}$$

$$5. \frac{(-a)^3}{(ab)^2} = \frac{(-1)^3 a^3}{a^2 b^2} = -1 \times a^3 \times a^{-2} b^{-2} = -a^{3-2} b^{-2} = -a b^{-2} = -\frac{a}{b^2}$$

$$7. \frac{a^2 + b^2}{2ab} \text{ ne se simplifie pas}$$

⚠ Il y a 2 catégories d'opérations dans $\mathbb{R}$:

- des opérations "fortes" ($\times$ et $\div$)
- des opérations "faibles" ($+$ et $-$).

Les puissances sont des "écriture abrégées de multiplications", elles font donc partie des opérations "fortes". Vous aurez des "formules" de calcul avec les opérations de leur famille ($\times$ et $\div$), mais rien avec $+$ et $-$. En particulier $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ (pensez aux identités remarquables pour $n=2$: il y a le double produit).

Ex 14.3

- $(-5)^3 = (-1 \times 5)^3 = (-1)^3 \times 5^3 = -5^3 = -125$
- $(3 \times 10^5)^3 = 3^3 \times (10^5)^3 = 27 \times 10^{15}$
- $(a^2 b)^3 = (a^2)^3 b^3 = a^{2 \times 3} b^3 = a^6 b^3$

(il est clair que par les deux précédentes, un calcul à la calculatrice n'a absolument aucun intérêt).

Ex 14.4

- $1000 = x^3 \Leftrightarrow 10 \times 10 \times 10 = x^3 \Leftrightarrow 10^3 = x^3 \Leftrightarrow x = 10$

En effet si vous dessinez la courbe représentative de la fonction cube, comme elle est strictement croissante, vous remarquerez que chaque image a un antécédent unique. On dit qu'une telle fonction est bijective : elle réalise une « correspondance 1 à 1 » entre les images et les antécédents.

$$128 \cdot 10^{-6} = x^3 \Leftrightarrow 2 \times 64 \times (10^{-2})^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow 2 \times (64 \times 10^{-6}) = x^3$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \times 4 \cdot 10^{-2}$$

↑ racine cubique de 2. C'est $(2)^{1/3}$ (voir paragraphe sur la racine cube).

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\frac{8}{27} = x^3 \Leftrightarrow \frac{2^3}{3^3} = x^3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 = x^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Ex 14.5 Résoudre :

$$1) (x-2)^3 = 1 \Leftrightarrow (x-2) = 1^3 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

$$S = \{3\}$$

$$2) (5-2x)^3 = -8 \Leftrightarrow (5-2x) = (-2)^3 \Leftrightarrow 5-2x = -8$$

$$\Leftrightarrow 8x = 5+8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

$$3) (3x+1)^3 = 10^{-3} \Leftrightarrow (3x+1) = (10^{-1})^3 \Leftrightarrow 3x+1 = 10^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 + 10^{-1} = -\frac{9}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} + \frac{-3}{10}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right\}$$

$$S = \left\{-\frac{3}{10}\right\}$$

$$-\frac{3}{10}$$

$$-\frac{9}{10}$$

Ex 14.6

Je rappelle que le volume d'une sphère est $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$1^\circ) 58 \leq 4\pi r \leq 60$$

$$\frac{29}{\pi} \leq r \leq \frac{30}{\pi}$$

$$9,230 \leq r \leq 9,550$$

Avec une amplitude de 4 mm :

$$9,2 \leq r \leq 9,6$$

$$2^\circ) 778,688 \leq r^3 \leq 886,736 \quad (\text{la fonction cube est croissante})$$

(inégalité en cm^3)

$$0,778 \leq r^3 \leq 0,885$$

(inégalité en dm^3 , i.e en L).

$$3,258 \leq \frac{4}{3} \pi r^3 \leq 3,708$$

$$3,2 \leq V \leq 3,8 \quad \text{inégalité en L, d'amplitude } 0,6 \text{ L.}$$

Ex 14.7 (Rue le tutoriel vidéo sur la décomposition en facteurs premiers)

$$1^\circ) \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 3^2 \times 2$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$2^\circ) 200 = 2 \times 10^2 ; \sqrt{200} = 2\sqrt{10}$$

$$3^\circ) \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$125 = 5 \times 5^2, \text{ donc } \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$4^\circ) \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \times 3 \times 3^2 ; \sqrt{54} = \sqrt{2 \times 3 \times 3^2}$$

$$= \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{3^2}$$

$$= \sqrt{6} \times 3$$

$$= 3\sqrt{6}$$

$$5^{\circ}) \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ \hline 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Ex 14.8

$$1^{\circ}) 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$= 2 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{2} \text{ est un facteur commun (voir « factoriser »)}$$

$$= (2 - 5 + 4) \sqrt{2}$$

$$= 1 \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$2^{\circ}) -\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$= (-1 + 2 + 4) \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

Ex 14.9

$$1^{\circ}) \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$$

$$2^{\circ}) \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} \quad (= 2)$$

$$3^{\circ}) 2\sqrt{5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$$

$$4^{\circ}) \frac{\sqrt{225}}{3} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{225}{9}} = \sqrt{25}$$

$$\text{Or } 4 < 10 < 20 < 25.$$

Donc, comme la fonction racine carrée est strictement croissante,

$$\sqrt{4} < \sqrt{10} < \sqrt{20} < \sqrt{25}.$$

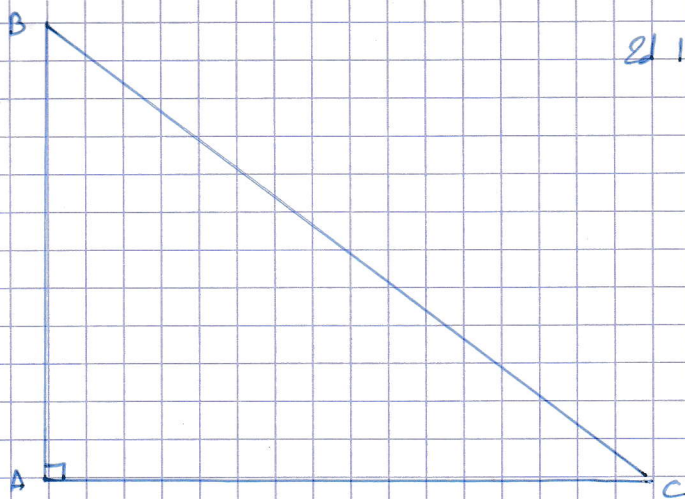
Finalement,

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 2\sqrt{5} < \frac{\sqrt{225}}{3}$$

(Pensez à bien répondre à la question: ce sont ces nombres que l'on vous a demandé de classer).

Ex 16.10 Formule de Héron.

$$\begin{aligned}
 1a) \quad AB^2 + AC^2 &= 6^2 + 8^2 \\
 &= 36 + 64 \\
 &= 100 \\
 &= 10^2 \\
 &= BC^2
 \end{aligned}$$



Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

1b) Dans un triangle ABC rectangle en A, l'aire se calcule comme suit:

$$A = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

2a) Dans le cas d'un triangle ABC:

$$p = \frac{10+8+6}{2} = 12 \text{ cm} ; \quad a = 10 ; \quad b = 8 ; \quad c = 6$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{12(12-10)(12-8)(12-6)} \\
 &= \sqrt{12 \times 2 \times 4 \times 6} \\
 &= \sqrt{\underbrace{2 \times 2 \times 3} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 2} \times \underbrace{2 \times 3}} \\
 &= \sqrt{2^6 \times 3^2} \\
 &= 2^3 \times 3 \\
 &= 3 \times 8 = 24 \text{ cm}^2; \text{ c'est cohérent avec 1b.}
 \end{aligned}$$

2b) Dans le cas d'un triangle équilatéral, $a=b=c$, et $p=3c$.

Donc, d'après la formule de Héron,

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{\frac{3c}{2} \left(\frac{3c-c}{2}\right) \left(\frac{3c-c}{2}\right) \left(\frac{3c-c}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{\frac{3c}{2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}c} \\
 &= \sqrt{\frac{c^4}{2^4} \times 3} \\
 &= \frac{c^2}{2^2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2.
 \end{aligned}$$

Q 14.7

$$2.) \ 200 = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$$

$$\text{Hence } \sqrt{200} = 2 \times 5 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$